Aprendizagem da divisão e comunicação matemática

O João vendeu os seus jogos de consola, em segunda mão, a 8€ cada um.
Conseguiu realizar um total de 328€ nessa venda.
Quantos jogos vendeu?

Divisão: um caminho a percorrer – Relato de sala de aula[1]

Paula tinha estado a trabalhar a divisão com os seus alunos e concebeu uma situação de divisão a partir de um contexto de medida. Era sobre um amigo que tinha recentemente ganho 328∈ a vender jogos de consola ao preço de 8∈ cada um. Paula planeava perguntar aos seus alunos quantos jogos ele tinha vendido.
Tinha dúvidas sobre a natureza desta situação, não sabia se seria um contexto rico e significativo para as crianças ou se seria demasiado “escolar”. Decidiu arriscar.

Apresentação da tarefa

Paula começa a aula com os alunos sentados à volta dela e conversando sobre o fim de semana.
Paula – *Deixem-me falar-vos do meu fim de semana. O meu amigo João vai mudar-se para Leiria.*
Luís – *Tenho uma prima que mora lá.*
Paula sorri e continua – *… então, este fim de semana, ele decidiu vender um conjunto de coisas que não queria levar.*
Depois de alguma dificuldade em livrar-se dos detalhes que os alunos queriam ver explicados ela lá conseguiu continuar.

> A professora descreve uma situação e coloca questões desencadeando a formulação de um problema.

Paula – *Sabem quanto dinheiro ele conseguiu só vendendo os jogos de consola? Trezentos e vinte e oito euros.*
Várias crianças – *Uah! A como os vendeu?*
Paula – *8 euros cada.*
Um aluno – *Só?! Quem me dera ter lá estado!*
Outro aluno – *Quantos vendeu? Ele devia ter muitos.*
Paula – *Era essa a pergunta que eu estava aqui a pensar. Pensei que talvez pudéssemos tentar descobrir hoje na hora da Matemática.*

Exploração da tarefa em trabalho de pares

Aluno – *Podemos ir já trabalhar nisso? Já sei como começar.*
Os alunos aceitaram a história como verdadeira apesar de não terem experimentado uma venda deste tipo. Foi realista para eles. Começam a matematizar a situação. Vão trabalhar a pares. Muitas crianças usam adições repetidas para chegar ao 328. Algumas crianças fazem pauzinhos no papel depois tentam contar grupos de 8 mas têm dificuldades. Outros usam a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição indo buscar factos conhecidos. No fim discutem as suas estratégias num *congresso matemático*.

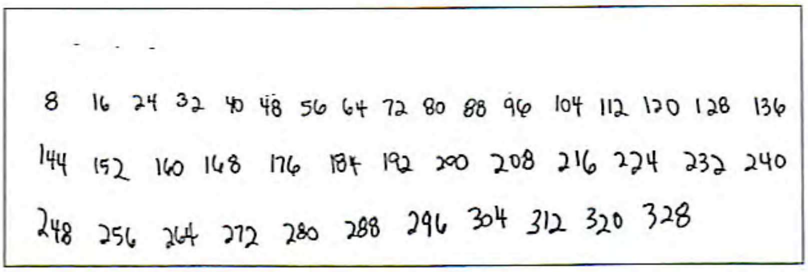
[1] Excepto os comentários incluídos em caixas sombreadas, o episódio foi adaptado de Fosnot, C., & Dolk, M. (2001).

POPH PROGRAMA OPERACIONAL POTENCIAL HUMANO
QREN QUADRO DE REFERÊNCIA ESTRATÉGICO NACIONAL PORTUGAL 2007.2013

Discussão da tarefa: o *congresso matemático*

> A professora gere a participação dos alunos, iniciando a discussão da tarefa pela apresentação das estratégias matematicamente menos poderosas.

Paula – *Então, Carlos vamos começar por ti?*
Carlos vem para a frente da turma e exibe orgulhosamente o seu cartaz. Contou de 1 em 1 mas registou apenas os múltiplos de 8 até 328 para não se perder à medida que avançava.

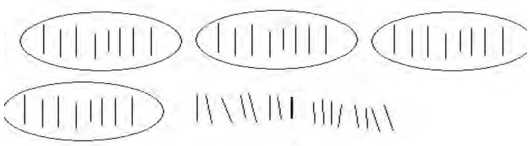


> O aluno explica o seu raciocínio.
>
> A professora suscita a reflexão sobre a estratégia apresentada, tentando estabelecer uma ligação com a estratégia de outros alunos.

Carlos – *Depois contei todos os números. Ele vendeu 41 jogos.*
Os colegas concordaram com a resposta.
Paula – *Muito bem! Mas tiveste muito trabalho. O teu método, Nuno, também deu muito trabalho. Fizeste pauzinhos não foi?*

Nuno fez pauzinhos e agrupou-os em grupos de 8. A professora tenta estabelecer uma ligação entre a estratégia de Carlos e de Nuno. Pretende que eles dêem atenção à eficácia ao longo da conversa por isso vai sublinhando subtilmente o tédio e a dificuldade das suas estratégias de contagem.

Nuno – *Sim, demorei muito tempo* – admite Nuno – *Nem consegui acabar.*



Nuno mostra a seu trabalho à turma. Desenhou e agrupou com círculos vários grupos mas desenhar 328 pauzinhos leva muito tempo, especialmente quando é preciso ir contando várias vezes para circundar de oito em oito. Completou 32 grupos e portanto não tem ainda a resposta.

> Um aluno, por sua iniciativa, compara publicamente a sua estratégia com a do colega, justificando.
>
> A professora gere a participação dos alunos, enfatizando a importância de encontrar estratégias matematicamente mais poderosas e salientando um processo que facilita a sua descoberta.

Carlos – *Foi por isso que eu fiz assim. Quando consegues o primeiro grupo escreves 8, depois o segundo jogo é 16.*
Nuno conta os seus tracinhos e concorda abanando a cabeça.
Paula – *O método do Carlos é um bocadinho mais rápido não é? Talvez à medida que formos mostrando as nossas estratégias vamos descobrindo processos mais rápidos. Era bom termos o trabalho mais facilitado, não era?*
Fazer o registo da contagem parece facilitar. Jaime e Sofia porque não apresentam a seguir? Vocês também arranjaram uma maneira de registar as contagens, não foi?

Estes alunos usaram uma estratégia de subtracções sucessivas. Paula pede-lhes para apresentarem a seguir, evidenciando a conexão entre adição repetida e subtracção sucessiva. À medida que eles apresentam a professora vai apontado na cartolina do Carlos 328 … 320, 312 etc.

POPH PROGRAMA OPERACIONAL POTENCIAL HUMANO
QREN QUADRO DE REFERÊNCIA ESTRATÉGICO NACIONAL PORTUGAL 2007.2013

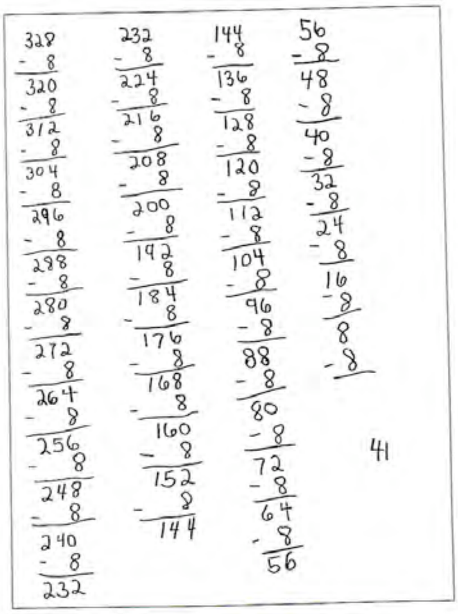
Paula – *É um pouco como o Carlos fez mas a andar para trás. Portanto, em ambas as maneiras não nos perdemos nas contagens. Para a frente com adição, como o Carlos, para trás com subtracção, como o Jaime e a Sofia.*
Miguel – *Mas isso ainda é muito trabalho. Olha a quantidade de papel que vocês gastaram.*

A professora faz um ponto de situação, relacionando as estratégias apresentadas e salientando os aspectos comuns.

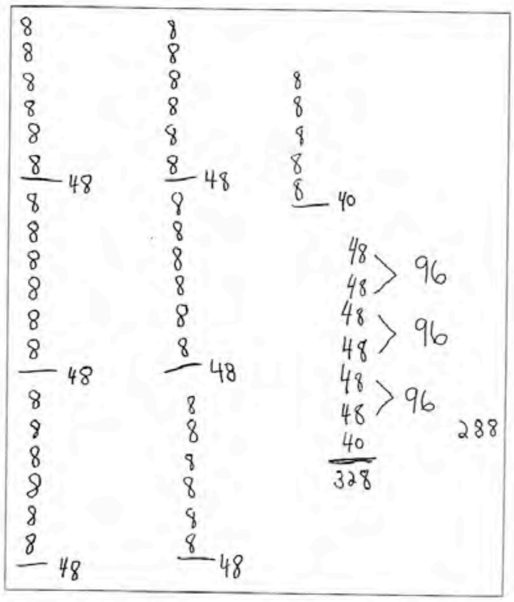
Laura e Alice concordam e perguntam – *Podemos partilhar o nosso? Temos uma maneira mais rápida.*
Colocam o seu cartaz ao lado do cartaz do Jaime e da Sofia.
Laura – *Nós começámos por adicionar 8, mas depois escrevemos 6 deles e percebemos que sabíamos que 6x8 é 48. E escrevemos isso.*
Alice – *Depois são dois 48's. Faz 96. E isso é 12 oitos. Depois nós somámos outro 48, e outro. Continuámos assim até ao 288.*
Laura – *Pois foi e depois tivemos um problema. Não podíamos por mais 48… só 40.*
Paula – *Como sabiam quando parar?*
Laura – *Porque tínhamos de chegar ao 328.*

Os alunos interagem entre si, argumentando os seus raciocínios.

A professora coloca questões que promovem a tomada de consciência do próprio pensamento dos alunos.



Cartaz do Jaime e da Sofia



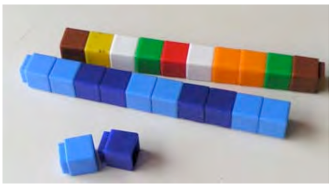
Cartaz da Laura e da Alice

É muitas vezes difícil para os alunos compreenderem as estratégias que são muito diferentes da sua própria. Jaime e Sofia subtraíram e sabiam que tinham que parar no zero. Será que entendem a estratégia de Laura e de Alice? E qual o sentido que Carlos e Nuno dão a esta estratégia?

Paula – *Nuno, estás a compreender? Podes ajudar-me, isto seria mais rápido não achas? Poupava o trabalho de fazer todos os pauzinhos e de contar, não era Carlos?*
Carlos abana a cabeça com ar desorientado.
Paula – *Quem pode ajudá-lo?*

A professora coloca questões de modo a promover o pensamento matemático dos alunos e incentiva-os a responsabilizarem-se pela aprendizagem dos colegas.

Jaime oferece-se para explicar. Enquanto o faz, Paula constrói seis filas com 8 cubinhos cada. Coloca uma fila no chão de modo a que Carlos e Nuno vejam bem, e depois outra… à medida que as coloca lado a lado pede a Nuno que encontre os números no seu cartaz.

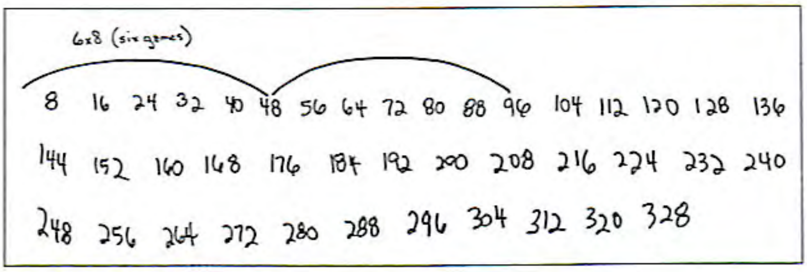


Paula – *Então Carlos quando elas chegaram ao 48, disseram que eram 6 jogos. Quantos eram no teu trabalho?*
Carlos – *Seis.*
Paula continua – *E o 96? Quantos jogos são?*
Carlos olha para o 8 do seu cartaz e conta a partir daí.
Carlos – *Doze.*

A professora coloca questões de modo a incentivar o pensamento matemático dos alunos, desafiando-os a clarificar os seus raciocínios.

Curiosamente Carlos não consegue logo perceber que se 48 são 6 jogos, o 96 corresponderia a 12. Nem conta a partir do 48. Volta ao 8, ao princípio. É muito difícil para as crianças compreenderem como os números podem ser usados para contar objectos agrupados e ao mesmo tempo contar os grupos. Carlos consegue contar cada grupo de 8 como um. Demonstra-o quando conta, apontando. O seu cartaz mostra saltos de oito e cada salto é para ele um jogo. Neste sentido conta grupos e elementos ao mesmo tempo. Mas Laura e Alice estão a tratar quarenta e oito (6x8) como uma unidade. Adicionam grupos de 48's e cada um destes grupos representa seis jogos. Carlos e Nuno esforçam-se por compreender.

Paula continua procurando criar pontes de compreensão. Pede autorização a Carlos para escrever no seu cartaz. (Os cubos continuam no chão dispostos de forma rectangular – 6x8). Como Carlos autoriza, Paula desenha saltos de antes do 8 (para vir desde 0) até ao 48.



Paula – *Quantos jogos são, Carlos?*
Carlos – *Seis.*
Paula escreve 6x8, seis jogos sobre o primeiro "salto".
Paula – *Nuno podes verificar? Podes construir com as filas de cubos?*

A professora introduz uma representação que permite criar pontes de compreensão entre as diferentes estratégias e coloca questões de modo a incentivar o pensamento matemático dos alunos.

Nuno tinha usando pauzinhos para contar, portanto os cubos estão mais próximos da sua maneira de pensar. Cada cubo é como se fosse um pauzinho. E a fila é como o grupo que ele circundou. Paula quer ter a certeza que Nuno tem oportunidade de arranjar as filas num modelo rectangular e relacioná-lo com os saltos no cartaz de Carlos. Continua a marcar os saltos e Nuno a fazer filas de cubos. Quando as representações estão completas, dirige-se a Laura e Alice.

Paula – *O que acham meninas? Isto traduz o vosso pensamento?*
As alunas dizem que sim.
Paula – *Alguém tem perguntas?*
Mónica que tem estado atenta, mas calada, tem um ar intrigado e diz que sim.
Mónica – *Porque é que vocês fizeram 6x8?*
Várias crianças parecem ter a mesma dúvida.
Alice e Laura encolhem os ombros e dizem: *"Não sei".*

> A professora coloca questões que promovem a tomada de consciência do pensamento dos alunos e incentiva-os alunos a colocarem questões aos colegas.
>
> Os alunos interpelam os colegas procurando justificações.

A pergunta de Mónica é pertinente. Ela própria tinha usado 10x8 – uma estratégia ainda mais eficiente. A multiplicação por 10 é um horizonte importante para ser alcançado pelos alunos. Mas para tal, têm de compreender o sistema posicional e o padrão de resultados a ele associado. De outra maneira multiplicar por dez não é diferente de multiplicar por seis. Paula quer aproveitar este momento.

Paula – *Por exemplo, Mónica, como fizeste? Tens uma sugestão?*
A Mónica traz o seu cartaz onde escreveu 80+80+80+80.
Mónica – *Eu fiz oitentas. Depois soube que eram 41 jogos.*
Paula – *Como terá ela chegado ao 80?*
O Nuno (com ar completamente baralhado) – *Se calhar foi um bom palpite.*
Paula – *Foi palpite Mónica?*
Mónica – *Não. Com 10 é mais fácil. Eu sabia que 10x8 é 80. É fácil. Então sabia que era 10 jogos mais 10 jogos, mais 10 jogos, mais 10 jogos. Isso era 320 euros… por isso era mais um jogo. Ele vendeu 41 jogos.*
Miguel – *Isso é mais ou menos como o meu. Mas eu fiz 4x8 primeiro. Eu sabia que era 32. E depois 10 vezes é 320.*

> A professora coloca questões para procurar pistas sobre a forma de pensar dos alunos e incentiva os "autores" das estratégias a explicá-las aos colegas.

Mónica e Miguel estão a usar estratégias muito eficazes. A de Miguel é a base do algoritmo da divisão. Apesar de ser tentador encorajar todos os alunos a usar este tipo de estratégias (mais eficazes) eles precisam de tempo para as explorar e as compreender por si próprios. Se a aprendizagem é um processo de desenvolvimento então é impossível conseguir que todas as crianças atinjam os mesmos níveis de compreensão ao mesmo tempo.

E a comunicação matemática?

Todo este relato dá expressão a aspectos importantes da comunicação na sala de aula, evidenciando-se o modo como a professora gere as interacções na turma. Através das intervenções que faz, organiza a comunicação fazendo, nomeadamente pontos de situação em momentos oportunos que permitem dar visibilidade ao foco da troca de ideias e à relação entre elas. Além disso, estas intervenções suscitam a reflexão sobre estratégias apresentadas, promovem a tomada de consciência, pelos alunos, do seu próprio pensamento e incentivam o pensamento matemático. Possibilitam, ainda, clarificar ideias, obter pistas sobre o pensamento dos alunos e criar pontes de compreensão entre diferentes estratégias. Os alunos participam do discurso da aula apresentando explicações e justificações e questionando os colegas. O congresso matemático, tal como foi organizado, constituiu um contexto favorável a este tipo de interacções.

QUADRO DE REFERÊNCIA ESTRATÉGICO NACIONAL

Para que ocorra uma comunicação multidireccional com estas características, é fundamental a existência de uma *certa* cultura de sala de aula. Nesta cultura é fundamental que os alunos se responsabilizem por explicarem e justificarem as suas ideias, por se ajudarem mutuamente, por escutarem atentamente o que dizem os colegas, por se interpelarem uns aos outros orientados pelo respeito mútuo, por se exprimirem de modo a que todos, e não apenas o professor, possam ouvi-los e por participarem organizadamente (Boavida et al., 2008).

Encontramos, neste relato, exemplos de que a professora procura constituir e manter uma cultura deste tipo. Por exemplo, quando, ao observar a dificuldade de Carlos, pergunta *"Quem pode ajudá-lo?"* procura ensinar os alunos que todos são responsáveis pela aprendizagem de todos. Também quando intervém dizendo "*Alguém tem perguntas?"* e Mónica, na sequência, questiona os colegas *"Porque é que vocês fizeram 6x8?",* legitima a possibilidade da existência de interacções entre os alunos tendo em vista uma maior compreensão do que é dito.

Não é simples constituir e manter culturas com estas características. Não basta fazer emergir ideias dos alunos. É, também, essencial "o professor saber o que fazer com estas ideias de modo a que a turma trabalhe colectivamente no sentido de chegar a consensos fundamentados e matematicamente relevantes sobre o significado de ideias matemáticas importantes" (Boavida et al., 2008, p. 123). No entanto, este é um desafio que não pode ser evitado que se pretende que a comunicação matemática seja uma capacidade transversal a todo o ensino e aprendizagem da Matemática, tal como é preconizado pelo actual programa do ensino básico (Ponte et al., 2007)

Referências

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, C. Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME – DGIDC.